ΜΕΜ-253: Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
Ασκήσεις στις πεπερασμένες διαφορές

Άσκηση 1 *Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών, με $a, b > 0$,*

$$\begin{cases} -x^2u''(x) - xu'(x) + 4u(x) = 20x^3, \quad x \in J = [1,2], \\ \qquad\qquad u(1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1. *Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα χρησιμοποιώντας την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της πρώτης παραγώγου και την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου.*
2. *Ποιος είναι ο περιορισμός για το βήμα h, ώστε ο αντίστοιχος πίνακας που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση της λύσης να είναι αντιστρέψιμος;*

Λύση Θεωρουμε έναν φυσικό αριθμό N και μια διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$ από $N+2$ ισαπέχοντα σημεία $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$, όπου $h = x_{i+1} - x_i$ για $i = 0, \ldots, N$. Χρησιμοποιώντας την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της πρώτης παραγώγου και την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου, λαμβάνουμε

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} - \frac{1}{x_i}\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + \frac{4}{x_i^2}U_i = 20x_i, \quad = 1, \ldots, N.$$

με $U_0 = U_{N+1} = 0$ λόγω των συνοριακών συνθηκών. Το παραπάνω σχήμα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\left(-1 + \frac{h}{2x_i}\right)U_{i-1} + \left(2 + \frac{4h^2}{x_i}\right)U_i + \left(-1 - \frac{h}{2x_i}\right)U_{i+1} = 20x_ih^2, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στις παραπάνω εξισώσεις είναι

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{4h^2}{2x_1} & -1 - \frac{h}{2x_1} & 0 & 0 & 0 \\ -1 + \frac{h}{2x_2} & 2 + \frac{4h^2}{2x_2} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 - \frac{h}{2x_{N-1}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 + \frac{h}{2x_N} & 2 + \frac{4h^2}{2x_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \\ U_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 20x_1 \\ 20x_2 \\ \vdots \\ 20x_{N-1} \\ 20x_N \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Ο πίνανας του συστήματος έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο αν $\frac{h}{2}\max_{1\le x\le 2}\left|-\frac{1}{x}\right| < 1$. Δηλαδή αν $h < 2$. $\square$

Άσκηση 2 *Έστω u η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών, με $a, b > 0$,*

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in J = [0,1], \\ \qquad au(0) + bu'(0) = c, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

1. *Διατυπώστε ένα διακριτό σχήμα με τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης τάξης ακρίβεια δυο.*
2. *Γράψτε τη μέθοδο σε μορφή γραμμικού συστήματος.*

Λύση Θεωρουμε έναν φυσικό αριθμό N και μια διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$ από $N+2$ ισαπέχοντα σημεία $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$, όπου $h = x_{i+1} - x_i$ για $i = 0, \ldots, N$. Τότε, για κάθε σημείο που διαμερισμού x_i, για $i = 1, \ldots, N$, θα ισχύει

$$-u''(x_i) + u(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Συμβολίζουμε τις προσεγγίσεις των $u(x_i)$ με U_i για $i = 0, \ldots, N+1$. Λόγω της συνοριακής συνθήκης στο δεξί άκρο, υποθέτουμε ότι $U_{N+1} = 0$ αφού $u(x_{N+1}) = 0$. Υποθέτουμε ότι η u επεκτείνεται για $x < 0$, και αφού για h πολύ μικρό, ισχύει ότι

$$u'(x_0) \approx \frac{u(x_0+h) - u(x_0-h)}{2h}.$$

Τότε, για το αριστερό άκρο, θα έχουμε

$$au(x_0) + b\frac{u(x_0+h) - u(x_0-h)}{2h} \approx c,$$

δηλαδή

$$u(x_0-h) \approx \frac{2ah}{b}u(x_0) + u(x_0+h) - \frac{2ch}{b}.$$

Τώρα, προσεγγίζουμε την $u''(x_0)$ με την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δευτερης παραγώγου και χρησιμοποιούμε την τελευταία σχέση. Έχουμε,

$$u''(x_0) \approx \frac{u(x_0+h) - 2u(x_0) + u(x_0-h)}{h^2} \approx \frac{2u(x_0+h) - \left(2 - \frac{2a}{b}\right)u(x_0)}{h^2} - \frac{2c}{bh}.$$

Για την προσέγγιση της $u''(x)$ στα σημεία x_i, $i = 1, \ldots, N$, χρησιμοποιούμε την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δευτερης παραγώγου και αν υποθέσουμε ότι $u \in \mathcal{C}^{(4)}[0,1]$, τότε

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + u(x_i) = f(x_i) + \eta_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Για να δείξουμε ότι το σχημα έχει τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης τάξης ακρίβεια δυο, θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά C η οποία είναι ανεξάρτηση του h τέτοια ώστε,

$$|\eta_i| \leq Ch^2 \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)|, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Για το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης, ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= -\frac{2u(x_1) - \left(2 - \frac{2a}{b}h\right)u(x_0)}{h^2} + u(x_0) - f(x_0) + \frac{2c}{bh} \\
\eta_i &= -\frac{u(x_{i+1} - 2u(x_i) + u(x_{i-1}}{h^2} + u(x_i) - f(x_i), \quad i = 1, \ldots, N.
\end{aligned}$$

Αναπτύσουμε την u κατά Taylor για $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}
u(x_{i+1}) &= u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^+) \\
u(x_{i-1}) &= u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^-).
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^+) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i^-), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση στο σημείο x_i, δηλαδή οτι $-u''(x_i) + u(x_i) - f(x_i) = 0$ για $i = 1, \ldots, N$, έχουμε

$$\eta_i = -\frac{h^2}{24}\left(u^{(4)}(\xi_i^+) + u^{(4)}(\xi_i^-)\right),$$

και ως εκ τούτου

$$|\eta|_j \leq \frac{h^2}{12} \max_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)|.$$

Για το η_0. Από Taylor,

$$u(x_1) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{h^2}{2}u''(x_0) + \frac{h^3}{6}u^{'''}(\xi), \;\; \xi \in (x_0, x_1).$$

Πάλι, με την βοήθεια της εξίσωσης στο x_0,

$$\eta_0 = -\frac{2}{h}u'(x_0) - \frac{2a}{bh}u(x_0) + \frac{2c}{bh} - \frac{h^3}{3}u'''(\xi).$$

Από την συνοριακή συνθήκη, έχουμε

$$au(x_0) + bu'(x_0) - c = 0,$$

και ως εκ τούτου

$$\eta_0 = -\frac{h^3}{3}u'''(\xi).$$

Δηλαδή,

$$|\eta_0| \leq \frac{h}{3} \max_{0\leq x\leq 1} |u'''(x)|.$$

Συνεπώς, το σχημα με τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης τάξης ακρίβεια δυο, θα είναι

$$\begin{aligned}
-\frac{2U_1 - \left(2 - \frac{2a}{b}\right)U_0}{h^2} + U_0 &= f(x_0) - \frac{2c}{bh},\\
-\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + U_j &= f(x_j), \quad j = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} 2+h^2-\frac{2a}{b}h & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2+h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N_1} \\ U_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2c}{b}h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

□